เฉลย Exercise 3 – คำนวณความเชื่อถือได้ของส่วนประกอบ

1. **อุปกรณ์ชิ้นหนึ่งมี hazard rate $\boldsymbol{h(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}}$ จงคำนวณค่าต่อไปนี้**

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

a. Probability density function

จาก

$$f(t) = h(t)R(t) = h(t)e^{-\int_0^t h(t')dt'}$$

ได้ว่า

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\int_0^t h\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt}$$

ดังนั้น

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-2\sqrt{t}}$$

b. Reliability functions

จาก

$$R(t) = \frac{f(t)}{h(t)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-2\sqrt{t}}}{\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

ดังนั้น

$$R(t) = e^{-2\sqrt{t}}$$

c. Mean Time To Failure (MTTF)

จาก

$$MTTF = \int_0^\infty R(t)dt$$

ได้ว่า

$$MTTF = \int_0^\infty e^{-2\sqrt{t}}dt$$

ดังนั้น

$$MTTF = \frac{1}{2}$$

d. **Variance**

จาก

$$Var(t) = \sigma^2 = E(T^2) - (E(T))^2$$

ได้ว่า

$$E(T^2) = \int_0^\infty t^2 f(t) dt$$

$$E(T^2) = \int_0^\infty t^2 \left(\frac{1}{\sqrt{t}} e^{-2\sqrt{t}}\right) dt = \frac{3}{2}$$

ดังนั้น

$$Var(t) = \sigma^2 = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

2. **ทดสอบส่วนประกอบ 100 ชิ้น เป็นเวลาทั้งหมด 1,000 ชั่วโมง สันนิษฐานว่า hazard rate คงที่ และ MTTF = 500 ชั่วโมง จงคำนวณว่าจะมีส่วนประกอบกี่ชิ้นจะเสียในช่วงระหว่าง 100 ถึง 200 ชั่วโมง**

ได้ว่า n = 100, T = 1,000 ชั่วโมง, MTTF = 500 ชั่วโมง, h(t) = constant = λ

Hazard rate คงที่ แสดงว่าเป็น exponential density function และ exponential reliability function

$$R(100 \leq T \leq 200) = R(T \geq 100) - R(T \geq 200)$$

ได้ว่า

$$R(T \geq 100) = e^{-\frac{100}{500}} = 0.81873$$

$$R(T \geq 200) = 1 - e^{-\frac{200}{500}} = 0.67032$$

จำนวนส่วนประกอบที่คาดว่าจะเสีย จากทั้งหมด 100 ชิ้น คือ

$$E[N(100)] = 100 \times 0.18127 = 81.873$$

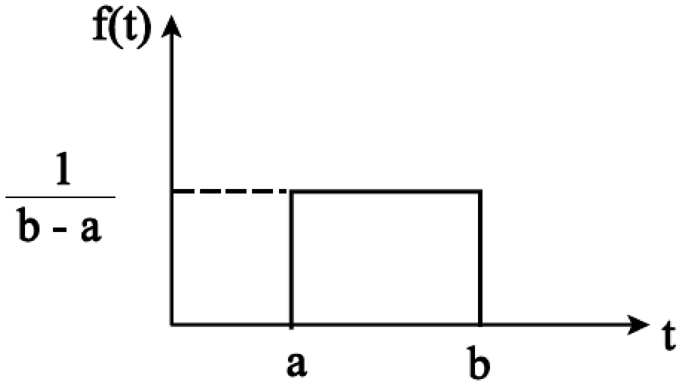
$$E[N(200)] = 100 \times 0.32968 = 67.032$$

ดังนั้นจำนวนส่วนประกอบที่คาดว่าจะเสียในช่วงระหว่าง 100 ถึง 200 ชั่วโมง คือ

$$E[N(100)] - E[N(200)] \approx 15$$

3. จงแสดงว่า uniform distribution เป็นโมเดลที่มีอัตราความเสียหายเพิ่มขึ้น คงที่ หรือลดลง (increasing failure rate, decreasing failure rate, or constant failure rate)

กราฟแสดง failure density function เป็นดังนี้

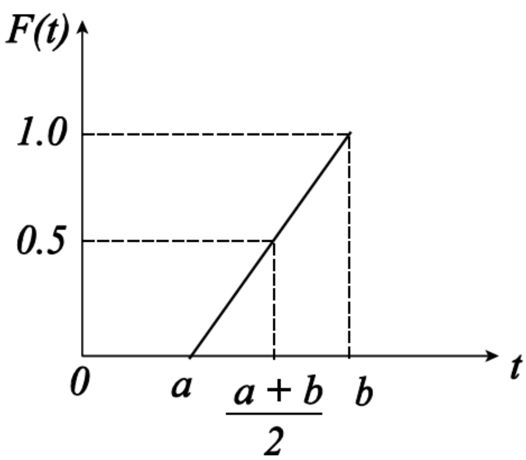


ถ้าเขียนในรูปสมการ

$$f(t) = \frac{1}{b-a}$$

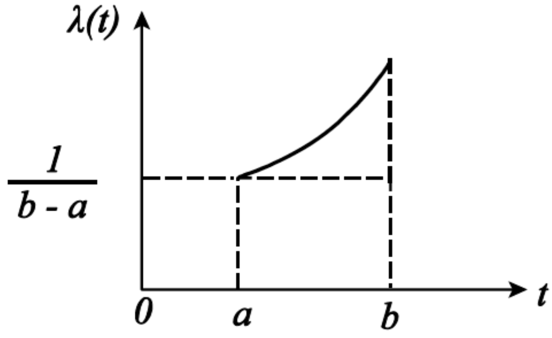
$$F(t) = \int_a^t \frac{1}{b-a} dt = \frac{t-a}{b-a}$$

$$R(t) = \int_t^b \frac{1}{b-a} dt = \frac{b-t}{b-a}$$



จะได้ว่า

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{1}{b-t}$$



ดังนั้น อัตราความเสียหายเพิ่มขึ้น (increasing failure rate)