Component Reliability Analysis

การวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ของส่วนประกอบ

ดร.ชลกานต์ เอี่ยมสำอางค์

สำนักงานปรมาณูเพื่อสันติ

นิยามของ Reliability

ถ้า R(t) คือ ความน่าจะเป็นที่ส่วนประกอบ (component) ยังใช้งานได้หลังจากเวลา t

$$R(t) = \Pr(T \geq t)$$

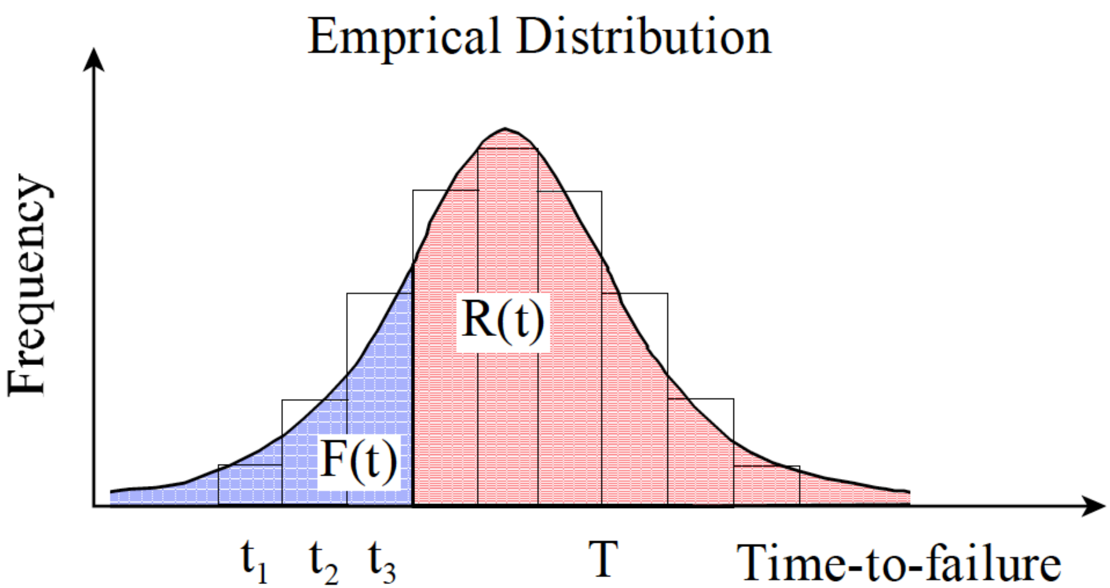
โดยที่ T คือเวลาที่ส่วนประกอบเสียหาย และ t คือ เวลาที่ใช้งาน

$$0 \leq R(t) \leq 1$$

Unreliability คือ $$\mathrm{F(t)} = 1 - R(t)$$

นิยามของ Reliability

ถ้ามีของ N ชิ้นที่เหมือนกัน นำมาทดลองระยะเวลาการใช้งาน เมื่อเวลาผ่านไปก็จะมีของที่เสียตามเวลา



f(t) = probability density function (pdf) / ***failure density function***

Mean Time to Failure (MTTF)

Mean-Time-To-Failure (MTTF) คือ ระยะเวลาที่คาดการณ์ว่า component จะเสีย

$$\widehat{MTTF} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} t_i = E(t)$$

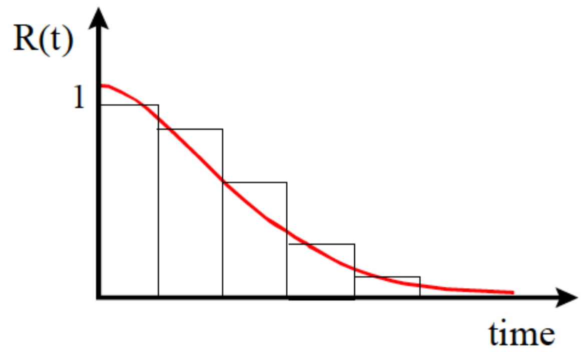
$N \rightarrow$ sample size in a life test,
$t_i \rightarrow$ time to failure of i^{th} unit.

ดังนั้น

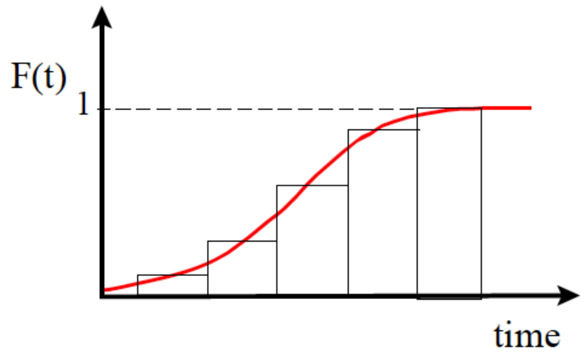
$$MTTF = E(t) = \int_0^{\infty} t \cdot f(t)\, dt \qquad MTTF = \sum_{i=1}^{\infty} t_i \Pr(t_i)$$

Reliability Plot

$$R(t) = \Pr(T \geq t)$$



$$F(t) = \Pr(T < t)$$



$$\boxed{F(t) = \int_0^t f(t)\,dt}$$ and $$\boxed{\frac{dF(t)}{dt} = f(t)}$$

$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$R(t) = \int_t^\infty f(t)\,dt$$

MTTF and Reliability

สามารถพิสูจน์ได้ว่า $\boxed{\mathrm{MTTF} = \int_0^\infty \mathrm{R(t)\,dt}}$ โดย $\lim_{t \to \infty} t \cdot \mathrm{R(t)} = 0$

พิสูจน์ $\mathrm{R(t)} = 1 - \int_0^t \mathrm{f(u)\,du}$ $\quad \mathrm{F(t)} = 1 - \mathrm{R(t)}$

$$\mathrm{f(t)} = \frac{\mathrm{dF(t)}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d[1 - R(t)]}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\mathrm{dR(t)}}{\mathrm{dt}}$$

$$\mathrm{MTTF} = t \cdot \mathrm{R(t)}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{R(t)\,dt}$$

$$\mathrm{MTTF} = \mu = \mathrm{E(t)} = \int_0^\infty t \cdot \mathrm{f(t)\,dt}$$

$$\mathrm{MTTF} = \int_0^\infty \mathrm{R(t)\,dt}$$

$$\mathrm{MTTF} = -\int_0^\infty \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{dR(t)}}{\mathrm{dt}}\,\mathrm{dt}}_{\mathrm{dv}}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Mean Residual Life (MRL)

Mean Residual Life (MRL) คือ เวลาที่คาดว่า component จะยังใช้ได้อยู่ก่อนเสีย

$$MRL = \frac{1}{R(T_1)} \int_{T_1}^{\infty} x f(x) dx$$

f(x) = pdf ← Conditional density function

x = time-to-failure

Failure Rate

failure rate คือ อัตราความเสียหาย ซึ่งก็คือ conditional probability ของ failure ระหว่างช่วงเวลา t_1 และ t_2 โดยที่ component ยังไม่เสียหายที่เวลา t_1

$$\Pr\left(T < t_2 \middle| T > t_1\right) = \frac{R(t_1) - R(t_2)}{R(t_1)}$$

ดังนั้น

$$\text{Failure rate} = \frac{\dfrac{R(t_1) - R(t_2)}{R(t_1)}}{t_2 - t_1}$$

Hazard Rate

hazard rate คือ failure rate ที่ $\triangle t$ เข้าใกล้ 0 (instantaneous failure rate)

$$h(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t_1) - R(t_1 + \Delta t)}{R(t_1)} \times \frac{1}{\Delta t}$$

$$h(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t_1) - R(t_1 + \Delta t)}{\Delta t} \times \frac{1}{R(t_1)}$$

$$h(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \times \frac{1}{R(t)}$$

$$\boxed{h(t) = -\frac{dR(t)}{R(t)} \times \frac{1}{dt}}$$

Reliability, Failure Rate, and Hazard Rate

ดังนั้น $$R(t) = 1 - F(t) \quad \text{and} \quad F(t) = \int_0^t f(t)\,dt$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = -\frac{dF(t)}{dt} \quad \text{and} \quad \frac{dF(t)}{dt} = f(t)$$

$$\boxed{\frac{dR(t)}{dt} = -f(t)}$$

$$h(t) = -\frac{dR(t)}{dt} \times \frac{1}{R(t)} = f(t) \times \frac{1}{R(t)}$$

$$\boxed{h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}}$$

Reliability, Failure Rate, and Hazard Rate

ค่าเฉลี่ยของ failure rate ถึงเวลา T คือ

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{T} \int_0^T h(t)\, dt$$

$$h(t) = -\frac{dR(t)}{R(t)} \times \frac{1}{dt} = -d\left\{\ln R(t)\right\} \times \frac{1}{dt}$$

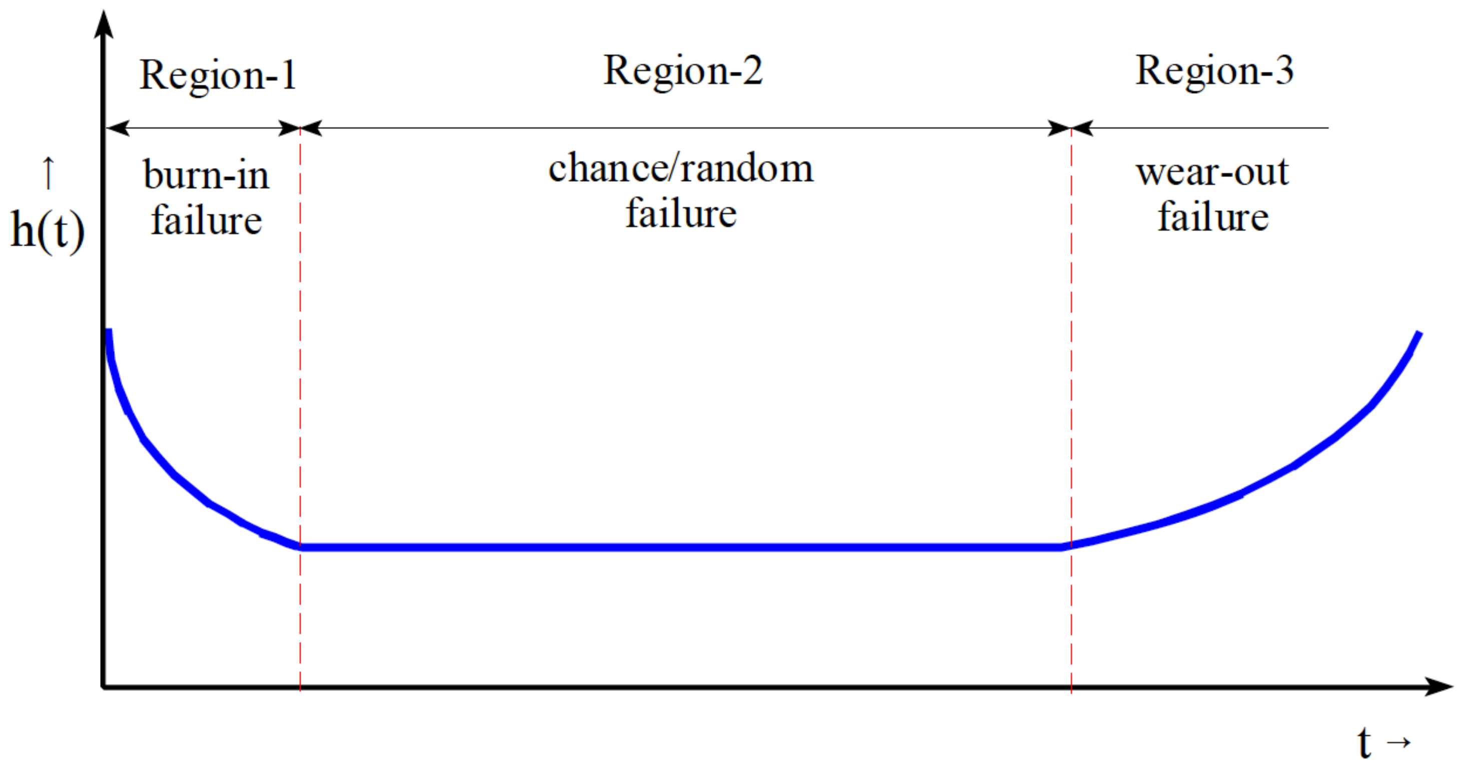
$$h(t)\, dt = -d\left\{\ln R(t)\right\}$$

$$\ln R(t) = -\int_0^t h(x)\, dx$$

$$\boxed{R(t) = e^{-\int_0^t h(x)\, dx}}$$

Bathtub Curve

Bathtub curve แสดงให้เห็นถึง hazard rate ในช่วงเวลาในการใช้งานของส่วนประกอบ โดยแบ่งออกเป็น 3 ส่วน

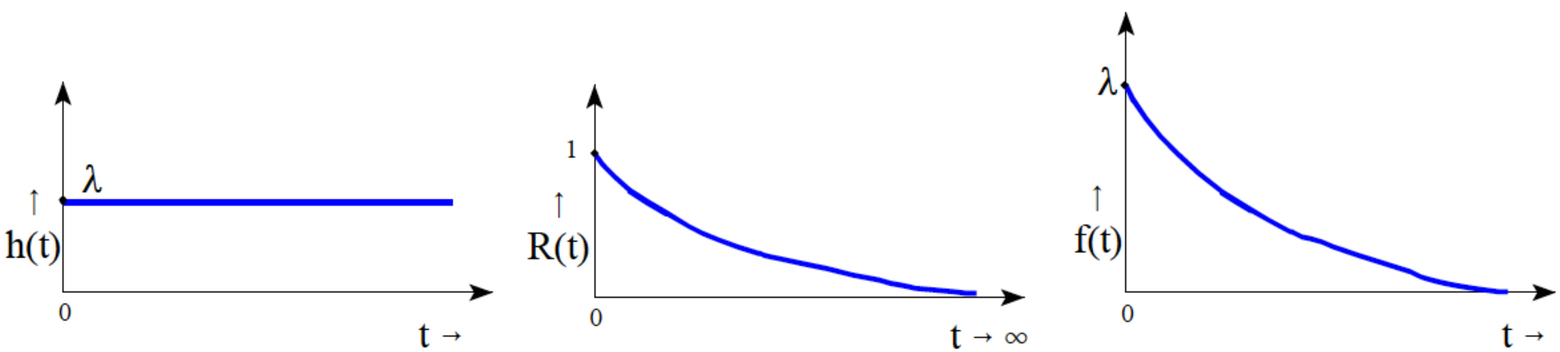


Constant Hazard Rate

Hazard rate (λ) คงที่ $h(t) = \lambda$

$$R(t) = e^{-\int_0^t h(x)\,dx} = e^{-\int_0^t \lambda\,dx} = e^{-\lambda \int_0^t dx} = e^{-\lambda t}$$

ดังนั้น $f(t) = h(t) \cdot R(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ซึ่งคือ Exponential Distribution



ใช้ในกรณีที่ความเสียหายเกิดขึ้นแบบ random

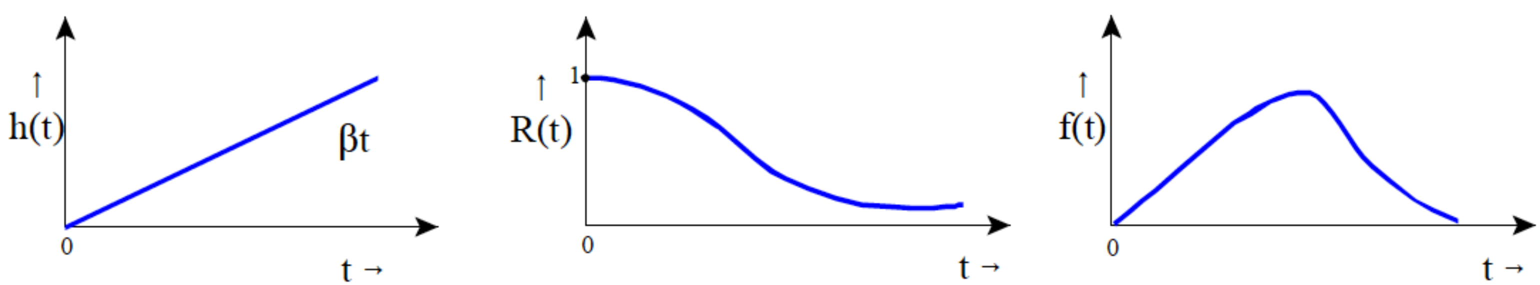
Increasing or Decreasing Failure Rate

ตัวอย่างเช่น failure rate เพิ่มขึ้นแบบคงที่ (linearly increasing)

$$h(t) = \beta t \quad (\beta \text{ is some constant})$$

$$R(t) = e^{-\int_0^t h(u)\,du} = e^{-\int_0^t \beta u\,du} = e^{-\beta \int_0^t u\,du} = e^{-\frac{1}{2}\beta t^2}$$

$$f(t) = R(t) \cdot h(t) = e^{-\frac{1}{2}\beta t^2} \times \beta t = \beta t e^{-\frac{1}{2}\beta t^2}$$



Exponential Distribution

Exponential distribution เหมาะสำหรับการโมเดลความเสียหายที่เกิดขึ้นแบบ random ไม่ได้ขึ้นอยู่กับการใช้งานที่ผ่านมา (no memory)

$$\mathrm{MTTF} = E(t) = \int_0^\infty t \cdot f(t)\,dt = \int_0^\infty t \cdot \lambda\, e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}\ \text{hours}$$

$$h(t) = \lambda = \frac{1}{\mathrm{MTTF}}$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$\mathrm{MTTF} = \frac{1}{\lambda}$$

Weibull Distribution

Weibull distribution เหมาะสำหรับการโมเดลความเสียหายที่เกิดขึ้นกับ component ทั่วไปที่เสียไปตามเวลา เช่น เกิดจากการกัดกร่อน (corrosion)

$$f(t) = \frac{\beta t^{\beta - 1}}{\alpha^{\beta}} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}$$

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(\theta)\, d\theta = \int_t^{\infty} \frac{\beta \theta^{\beta - 1}}{\alpha^{\beta}} e^{-\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\beta}} d\theta = - e^{-\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^{\beta}} \Bigg|_t^{\infty}$$

$$\boxed{R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}}$$

α = scale parameter

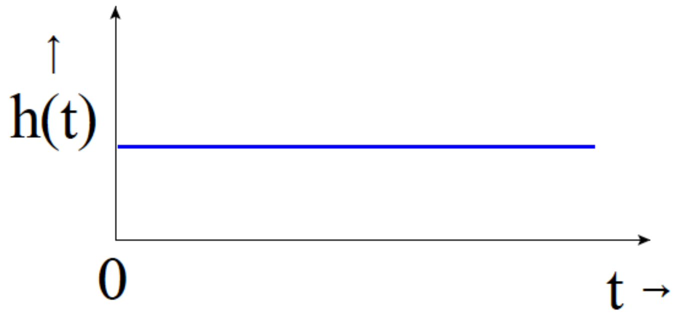
β = shape parameter

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\beta \frac{t^{\beta - 1}}{\alpha^{\beta}} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}}{e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}}$$

$$\boxed{h(t) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta - 1}}$$

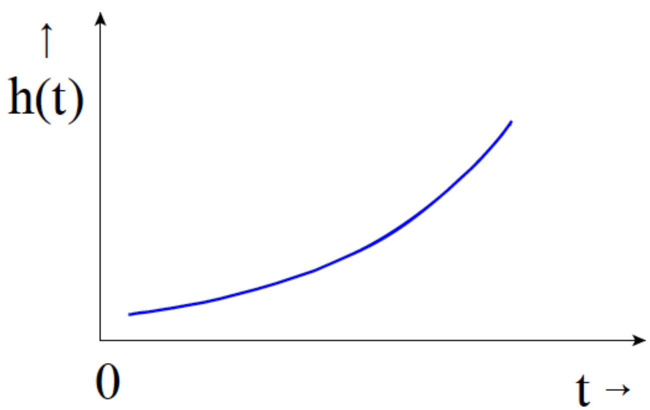
Weibull Distribution

Case I - $\beta = 1$

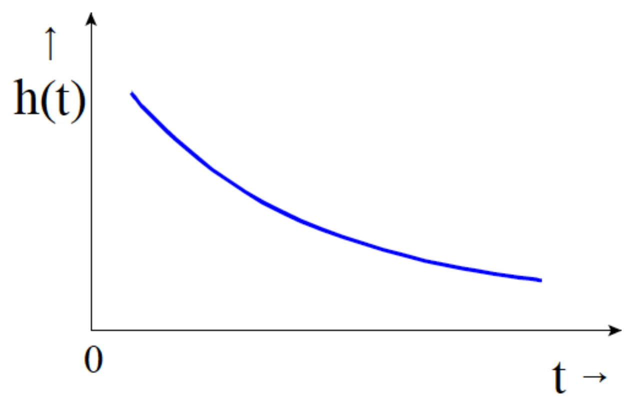


$$\lambda = \frac{1}{\alpha}$$

Case II - $\beta > 1$



Case III - $\beta < 1$



Gamma Distribution

Gamma distribution เหมาะสำหรับการโมเดลความเสียหายที่เกิดขึ้นแบบ k independent failures โดยที่แต่ละ failure เกิดขึ้นแบบ Poisson Distribution

$$f(t) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} t^{\alpha - 1} e^{-\frac{t}{\beta}} \qquad \text{where} \quad \alpha, \ \beta, \quad t > 0$$

α = shape parameter, and β = scale parameter

ถ้า α เป็นเลขจำนวนเต็ม

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\alpha - 1} \frac{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k} e^{-\frac{t}{\beta}}}{k!}$$

$$h(t) = \frac{t^{\alpha - 1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha) \sum_{k=0}^{\alpha - 1} \frac{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{k}}{k!}}$$

$$MTTF = \alpha\beta$$

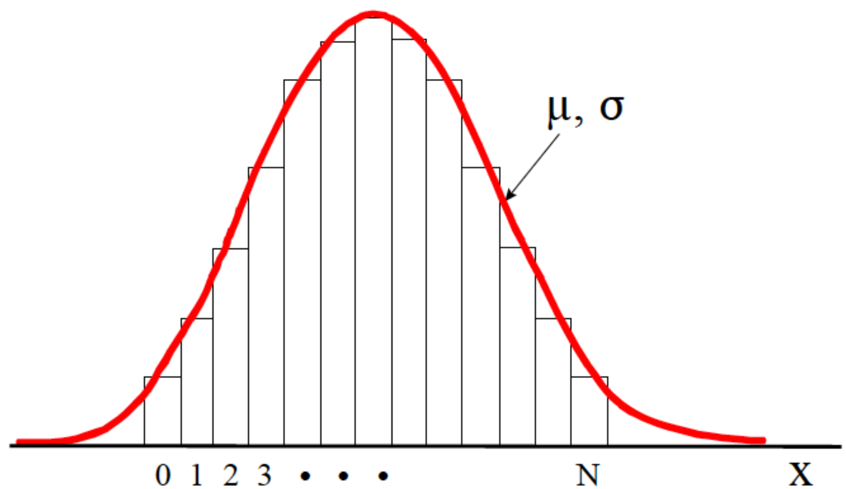
Binomial Distribution

Binomial distribution เหมาะสำหรับการโมเดลจำนวนความเสียหายที่เกิดขึ้นกับ component จำนวน N ถ้าความน่าจะเป็นที่แต่ละ component จะเสียหายคือ p

$$\Pr(x \leq M) = \sum_{x=0}^{M} \frac{N!}{(N-x)!\,x!} p^{x} (1-p)^{N-x}$$

$$\mu = Np$$

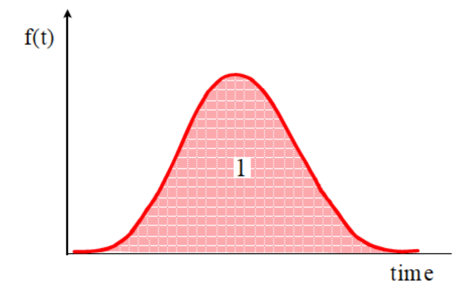
$$\sigma = \sqrt{Npq}$$



Normal Distribution

Normal distribution เหมาะสำหรับการโมเดลความเสียหายที่เกิดขึ้นกับ component ที่มี stress สูงๆ

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(t - \mu_t)^2}$$

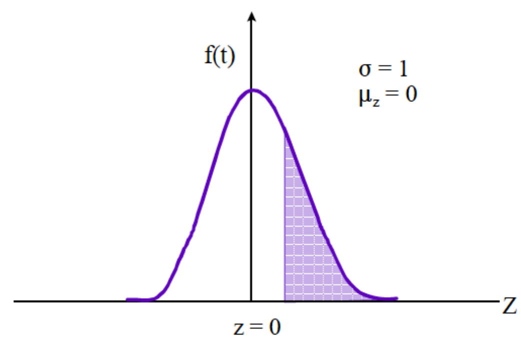


Normal Distribution

where $-\infty < t < \infty,\ -\infty < \mu < \infty,\ \sigma^2 > 0$

$$\mu_t = \mathrm{MTTF}$$

$$R(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(t-\mu_t)^2}{2\sigma_t^2}} dt = \phi\left(z = \frac{t - \mu}{\sigma}\right)$$



Standard Normal Distribution

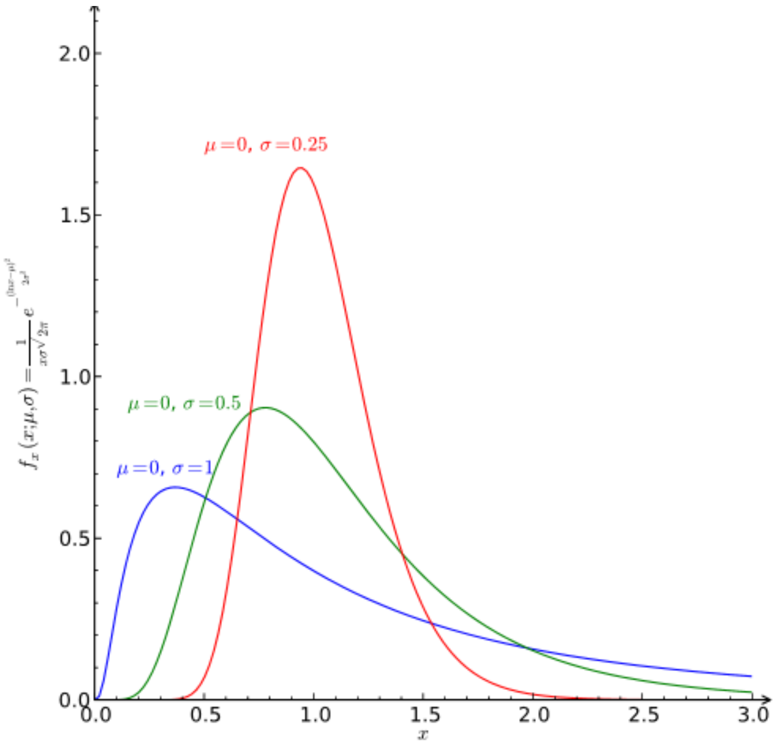
Lognormal Distribution

Lognormal distribution เหมาะสำหรับการโมเดลความเสียหายที่เกิดจากเหตุการณ์ที่อาจเปลี่ยนแปลงปริมาณหลายเท่า เช่น เวลาที่ใช้ในการซ่อมแซม

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_t\, t\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_t^2}(\ln t - \mu_t)^2}$$

μ_t = mean of log of t's

μ = mean of t's

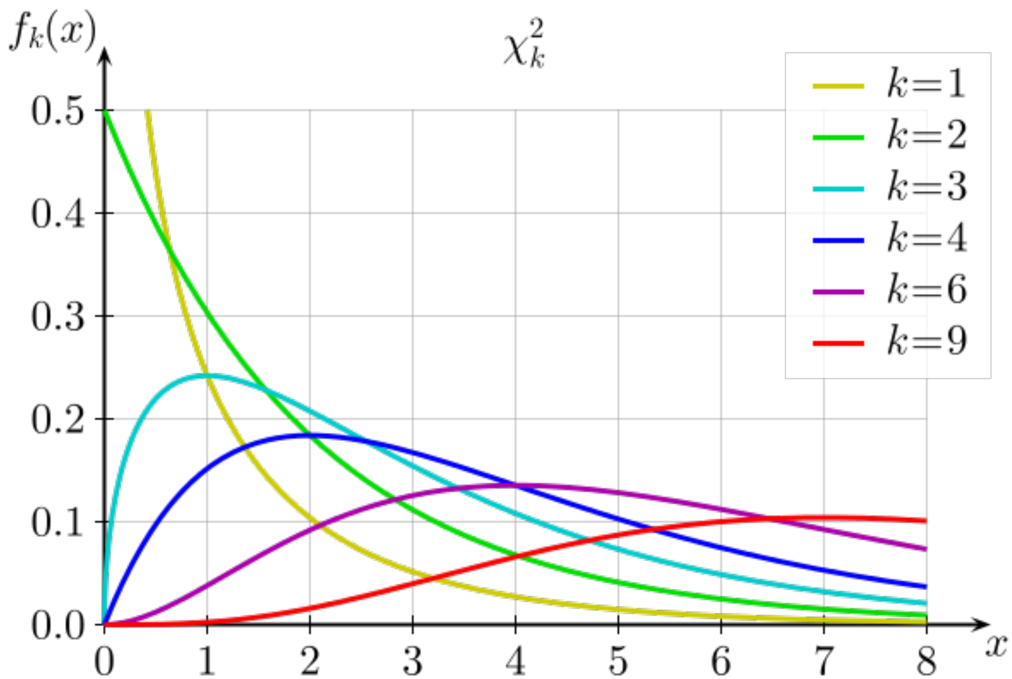


Chi-squared Distribution

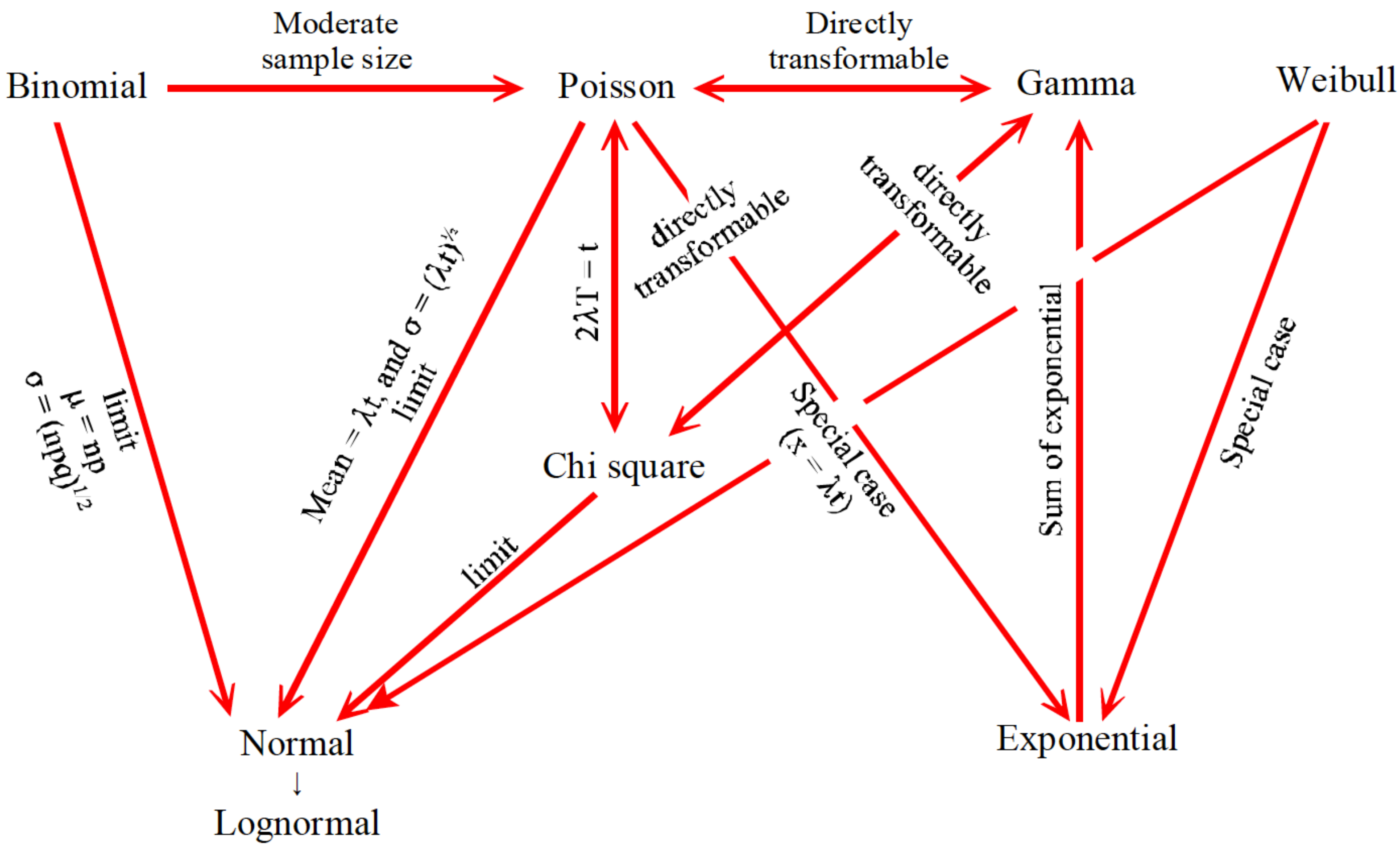
Chi-squared distribution เหมาะสำหรับการโมเดลความเสียหายแบบทดสอบ hypothesis หรือการคำนวณ confidence interval

$$f(t) = \frac{e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{N}{2}-1}}{2^{\frac{N}{2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}$$

N is the degrees of freedom



ความสัมพันธ์ระหว่าง Distributions



Likelihood Functions เพื่อคำนวณ Failure

Type of Observation	Likelihood Function	Example Description
Exact Lifetimes	$L_i(\theta\|t_i) = f(t_i\|\theta)$	Failure time is known
Right Censored	$L_i(\theta\|t_i) = R(t_i\|\theta)$	Component survived to time t_i
Left Censored	$L_i(\theta\|t_i) = F(t_i\|\theta)$	Component failed before time t_i
Interval Censored	$L_i(\theta\|t_i) = F(t_i^{RI}\|\theta) - F(t_i^{LI}\|\theta)$	Component failed between t_i^{LI} and t_i^{RI}
Left Truncated	$L_i(\theta\|t_i) = \frac{f(t_i\|\theta)}{R(t_L\|\theta)}$	Component failed at time t_i where observations are truncated before t_L.
Right Truncated	$L_i(\theta\|t_i) = \frac{f(t_i\|\theta)}{F(t_U\|\theta)}$	Component failed at time t_i where observations are truncated after t_U.
Interval Truncated	$L_i(\theta\|t_i) = \frac{f(t_i\|\theta)}{F(t_U\|\theta) - F(t_L\|\theta)}$	Component failed at time t_i where observations are truncated before t_L and after t_U.

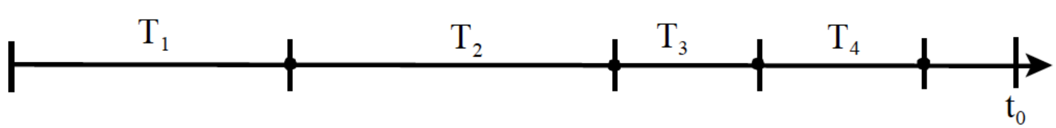
Mean Time Between Failure (MTBF)

สำหรับส่วนประกอบที่สามารถซ่อมแซมได้ Mean Time Between Failure (MTBF) คือ ระยะเวลาเฉลี่ยระหว่างแต่ละครั้งที่มีความเสียหายเกิดขึ้น

ถ้า T_i คือระยะเวลาระหว่างความเสียหายแต่ละครั้ง

$$\widehat{MTBF} = \frac{\sum_i T_i}{n} \quad \left(t_o = t_n \text{ and } t_o > t_n\right)$$

Example:

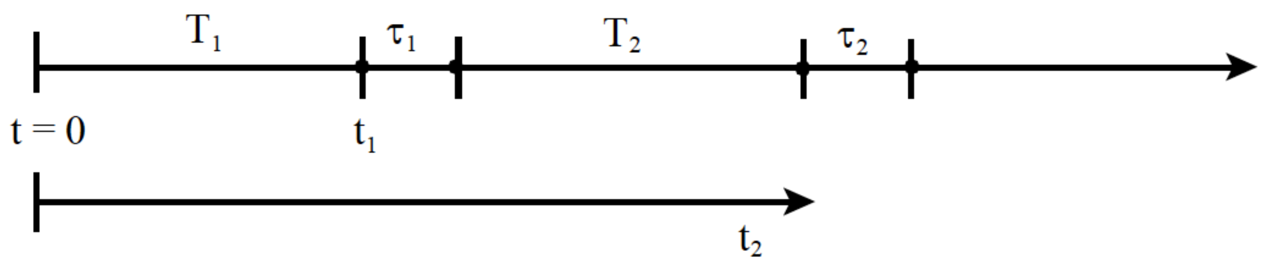


$T_1 = 80,\ T_2 = 70,\ T_3 = 60,\ T_4 = 40$ $\quad$ $\mathbf{T_0 = 300}$

$$\widehat{MTBF} = \frac{300}{4} = 75 \text{ hours}$$

Mean Time To Repair (MTTR)

ให้ τ_i คือระยะเวลาที่ใช้ในการซ่อมแซมแต่ละครั้ง



$$\text{MTBF} = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i}{n} \qquad (\text{ for } t_0 = t_n \text{ and } t_0 > t_n)$$

$$\text{MTTR} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \tau_i}{n-1} \qquad (\text{ for } t_0 = t_n) \qquad \bar{\mu} = \text{Repair Rate} = \frac{1}{\text{MTTR}}$$

$$\text{MTTR} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tau_i}{n} \qquad (\text{ for } t_0 > t_n) \qquad \mu(t) = \text{Instantaneous Repair Rate}$$

ความน่าจะเป็นที่จะใช้งานได้ (Availability)

ให้ $\bar{d}$ = MTTR คือ average downtime หรือ ระยะเวลาเฉลี่ยที่ส่วนประกอบใช้ไม่ได้เนื่องจากการซ่อมแซม

$\bar{u}$ = MTBF คือ average uptime ระยะเวลาเฉลี่ยที่ส่วนประกอบใช้ได้

$$\text{average availability} = \bar{a} = \frac{\bar{u}}{\bar{u} + \bar{d}}$$

$$a_1 = \text{availability (limiting pointwise)} = \frac{\text{MTBF}}{\text{MTBF} + \text{MTTR}}$$

$$a_1 \approx \bar{a}$$

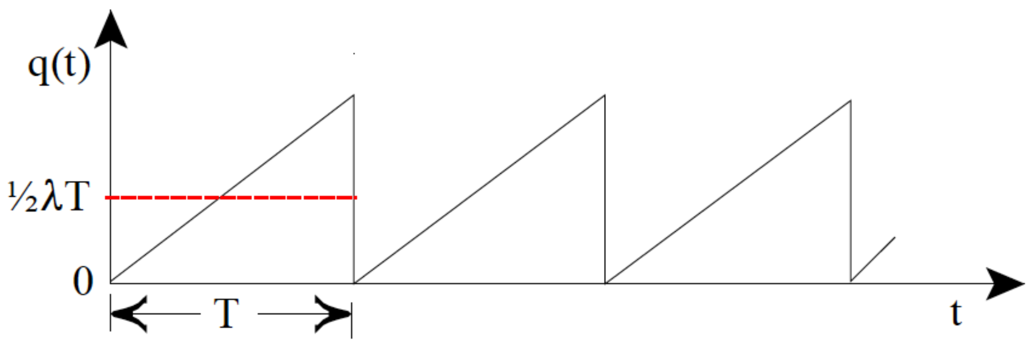
$$\bar{q} = \text{unavailability} = \frac{\bar{d}}{\bar{u} + \bar{d}}$$

ส่วนประกอบที่ซ่อมแซมได้ (Repairable)

ถ้าสันนิษฐานว่าเวลาที่ใช้ซ่อมแซมน้อยมาเทียบกับเวลาใช้งาน และระบบกลับมาใช้ได้สมบูรณ์แบบหลังจากที่ซ่อมแล้ว

$$q(t) = 1 - e^{-\lambda t} \cong \lambda t \quad \text{if } \lambda t \ll 1$$

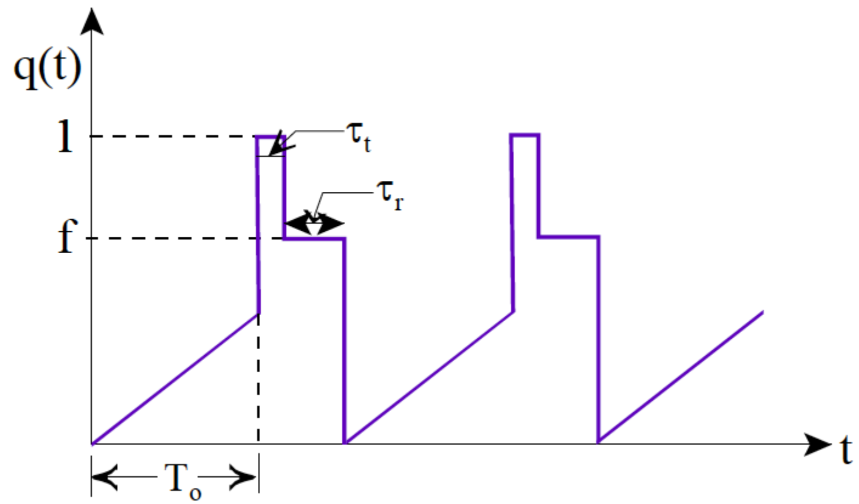
$$\boxed{a(t) = 1 - \lambda t}$$



$$\bar{q} = \frac{1}{2}\lambda T \qquad \bar{a} = 1 - \frac{1}{2}\lambda T \quad \text{(average values)}$$

ส่วนประกอบที่ซ่อมแซมได้ (Repairable)

ถ้ารวมทั้งเวลาที่ใช้ทดสอบและที่ใช้ซ่อมแซม ให้ τ_t คือ เวลาที่ใช้ทดสอบและดำเนินการบำรุงรักษา และ τ_r คือ เวลาที่ใช้ในการซ่อมแซม



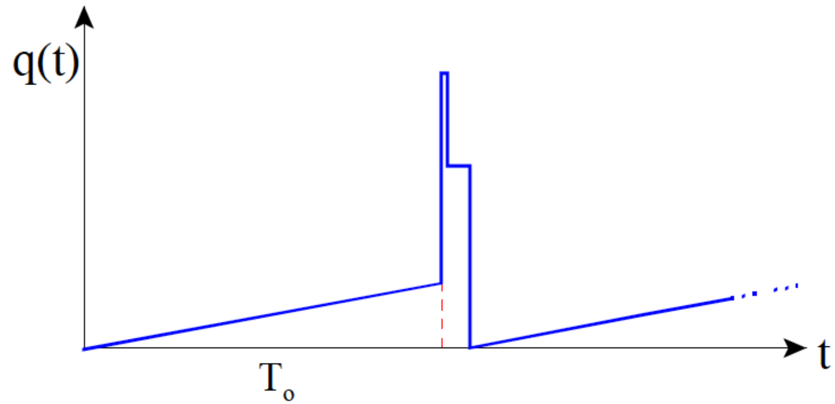
Average unavailability สำหรับหนึ่งรอบการทดสอบคือ

$$\boxed{\overline{q} = \frac{1}{2}\lambda T_o + f_r \frac{\tau_r}{T} + \frac{\tau_t}{T} \qquad T = T_o + \tau_t + f_r \tau_r}$$

ตัวอย่างส่วนประกอบที่ซ่อมแซมได้ (Repairable)

Example:

$$T = T_o + \tau_t + f_r \tau_r$$



$$\lambda = 0.0001 \text{ hr}^{-1}, \quad T_o = 1 \text{ month} = 720 \text{ hours},$$
$$t_t = 2 \text{ hours}, \quad f_r = 0.1, \quad \tau_r = 20 \text{ hours}$$

$$T = 720 + 2 + 0.1(20) = 724$$

$$\overline{q} = \frac{1}{2}(0.0001)\,720 + 0.1\left(\frac{20}{724}\right) + \frac{2}{724}$$
$$= 0.0365 + 0.00272 + 0.00272 = 0.04194$$
$$\overline{a} = 1 - 0.04196 = 0.958$$

References

- IAEA, SAFETY SERIES SSG-3: Development and Application of Level 1 Probabilistic Safety Assessment for Nuclear Power Plants. 2010.
- IAEA, TECDOC-1511: Determining PSA Quality for Applications in NPPs. 2006.
- Modarres, Mohammad, Mark P. Kaminskiy, and Vasiliy Krivtsov. “Reliability engineering and risk analysis: a practical guide”. CRC press, 2016.
- Christian Kirchsteiger, On the use of probabilistic and deterministic methods in risk analysis, Journal of Loss Prevention in the Process Industries 12 (1999) 399–419.
- NRG, Training Course on “Requirements and safety evaluation of NPP PSA”, INSC Project MC3.01/13, Training and Tutoring for experts of the NRAs and their TSOs for developing or strengthening their regulatory and technical capabilities.
- F.C. Brayon, M. Mazlehab, P. Prak Tomb, A.H.S Mohd Sarifc, Z. Ramlia, F. Zakariab, F. Mohamedc, Abid Aslamd, A. Lyubarskiye, I.Kuzminae, P.Hughese , A.Ulsese, Building Competence for Safety Assessment of Nuclear Installations: Applying IAEA's Safety Guide for the Development of a Level 1 Probabilistic Safety Assessment for the TRIGA Research Reactor in Malaysia
- K. Simola, Reliability methods in nuclear power plant ageing management, VTT Publications 379, Technical Research Centre of Finland ESPOO 1999.
- JRC Scientific and Technical Reports, Guidelines for Analysis of Data Related to Ageing of Nuclear Power Plant Components and Systems, EUR 23954 EN - 2009