Review of Probability and Statistics Probability

พื้นฐานการคำนวณความน่าจะเป็นและสถิติความน่าจะเป็น

ดร.ชลกานต์ เอี่ยมสำอางค์

สำนักงานปรมาณูเพื่อสันติ

พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra)

Designation	Mathematical Symbolism	Engineering Symbolism
Identity laws	$A \cup \varnothing = A$ $A \cup \Omega = \Omega$ $A \cap \varnothing = \varnothing$ $A \cap \Omega = A$	$A + 0 = A$ $A + 1 = 1$ $A \bullet 0 = 0$ $A \bullet 1 = A$
Idempotent laws	$A \cap A = A$ $A \cup A = A$	$A \bullet A = A$ $A + A = A$
Complement laws	$A \cap \overline{A} = \varnothing$ $A \cup \overline{A} = \Omega$	$A \bullet \overline{A} = 0$ $A + \overline{A} = 1$
Law of Absorption	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	$A + (A \bullet B) = A$ $A \bullet (A + B) = A$
de Morgan's Theorem	$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{(A \bullet B)} = \overline{A} + \overline{B}$ $\overline{(A + B)} = \overline{A} \bullet \overline{B}$
Commutative laws	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$	$A \bullet B = B \bullet A$ $A + B = B + A$
Associative laws	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$ $A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C = A \bullet B \bullet C$
Distributive laws	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \bullet (B + C) = (A \bullet B) + (A \bullet C)$ $A + (B \bullet C) = (A + B) \bullet (A + C)$

ตัวอย่างการคำนวณ Boolean Algebra

Example: Show that $\overline{\left[(A\cdot B)+(A\cdot\overline{B})+(\overline{A}\cdot\overline{B})\right]}=\overline{A}\cdot B$

$$\overline{(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})+(\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{B}})+(\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}})}=\left(\overline{\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}}\right)\cdot\left(\overline{\mathrm{A}\cdot\overline{\mathrm{B}}}\right)\cdot\left(\overline{\overline{\mathrm{A}}\cdot\overline{\mathrm{B}}}\right)$$

$$=(\overline{\mathrm{A}}+\overline{\mathrm{B}})\cdot(\overline{\mathrm{A}}+\mathrm{B})\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\overline{\mathrm{A}}\cdot(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

$$=\overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{A}+\overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}=\phi+\overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}$$

$$=\overline{\mathrm{A}}\cdot\mathrm{B}$$

ความน่าจะเป็น (Probability)

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์หนึ่งในโอกาสทั้งหมด

$$\Pr(E) = \frac{n_E}{n} \qquad \left(\text{Note that } \Pr(S) = \frac{n}{n} = 1, \quad \Pr(\varnothing) = 0 \right)$$

n_E คือ จำนวนครั้งที่เหตุการณ์ E เกิดขึ้น

n คือ จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมด

สัจพจน์ของความน่าจะเป็น

$\Pr(E) \geq 0$, for every event E

$\Pr(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = \Pr(E) + \Pr(E) + \cdots$ if no common points exist between $E_1, E_2, \cdots$ (mutually exclusive)

$\Pr(S) = 1 \rightarrow \Pr(\varnothing) = 0$

ความน่าจะเป็นเงื่อนไข (Conditional Probability)

ถ้า E_1 และ E_2 มีส่วนประกอบบางส่วนเหมือนกัน

$$\Pr(E_1 \cup E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2) - \Pr(E_1 \cap E_2)$$

ความน่าจะเป็นเงื่อนไข (Conditional Probability)

$$\Pr(E_2 \mid E_1) = \frac{\Pr(E_1 \cap E_2)}{\Pr(E_1)} \quad \text{if} \ \Pr(E_1) > 0$$

E_2 จะเป็นอิสระ (Independent) จาก E_1 เมื่อ $\Pr(E_2 \mid E_1) = \Pr(E_2)$.

$$\Pr(E_2 \cap E_1) = \Pr(E_1)\Pr(E_2).$$

ตัวอย่าง Conditional Probability

Example: สลักเกลียว (bolt) ที่มีตำหนิจากผู้ผลิตสองเจ้า

$$\Pr(D_1) = 0.05,\ \Pr(D_2) = 0.07 \text{ for defectives}$$

ถ้าเลือกสลักเกลียวมาจากเจ้าละอัน ความน่าจะเป็นที่ทั้งสองอันจะมีตำหนิ

$$\Pr(D_1 \cap D_2) = \Pr(D_1)\Pr(D_2) = (0.07)(0.05) = 0.0035$$

ความน่าจะเป็นที่อย่างน้อยหนึ่งอันมีตำหนิ

$$\Pr(D_1 \cup D_2) = \Pr(D_1) + \Pr(D_2) - \Pr(D_1 \cap D_2)$$

$$= 0.05 + 0.07 - 0.0035 = 0.1165$$

การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

การเรียงสับเปลี่ยน เซ็ตละ r ชิ้น จากทั้งหมด n ชิ้น

$$ {}_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad r = 1, 2, \ldots, n $$

นิยามของ permutation: 1! = 1, 0! = 1

Example: ถ้ามี A, B C แล้วจะเรียงสับเปลี่ยนของ 2 ชิ้นได้กี่แบบ

$$ {}_{3}P_{2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6 \qquad A \cdot B,\ A \cdot C,\ B \cdot C,\ B \cdot A,\ C \cdot A,\ C \cdot B $$

การเลือกจัดหมู่ (Combination)

การเลือกจัดหมู่ เซ็ตละ r ชิ้น จากทั้งหมด n ชิ้น

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad r = 1, 2, \ldots, n$$

$${}_nP_r = \binom{n}{r} r!$$

Example: ถ้ามีหลอดไฟ 20 ดวง จะเลือกออกมา 4 ดวง ได้กี่แบบ

$$C_4^{20} = \binom{20}{4} = \frac{20!}{4!(20-4)!} = 4845$$

โมเดลความน่าจะเป็น (Probability Model)

Probability Model ที่สมบูรณ์จะต้องมีความน่าจะเป็นรวมของเหตุการณ์ที่เป็นได้ทั้งหมด เท่ากับ 1

$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \quad \text{k either finit or infinite}$$

$$\text{probability model is then } \Pr(x_1) \geq 0 \quad i = 1, 2, \ldots, k \text{ and } \sum_{i=1}^{k} \Pr(x_i) = 1$$

โมเดลความน่าจะเป็นมีหลายชื่อเรียก Probability Function, Probability Distribution, Probability Density Function (pdf)

โดย random variable อาจเป็นแบบ discrete หรือ continuous

และ distribution ก็อาจจะเป็นแบบ discrete หรือ continuous

Hypergeometric Distribution

ความน่าจะเป็นที่ได้ของที่มีตำหนิจากของทั้งหมด

$$\text{General population}\begin{cases} N = \text{number of units in a population} \\ D = \text{number of defective units in a population} \end{cases}$$

$$\text{Sample}\begin{cases} \begin{cases} n = \text{number of units selected without replacement} \\ x = \text{number of defective units selected} \end{cases} \\ \begin{cases} N - D = \text{number of non-defective units in the population} \\ n - x = \text{number of non-defective units in the selected sample} \end{cases} \end{cases}$$

Possible value of x is $\max(0, n + D\text{-}N) \le x \le \min(D, n)$. Probability of having X defectives in a sample of N is

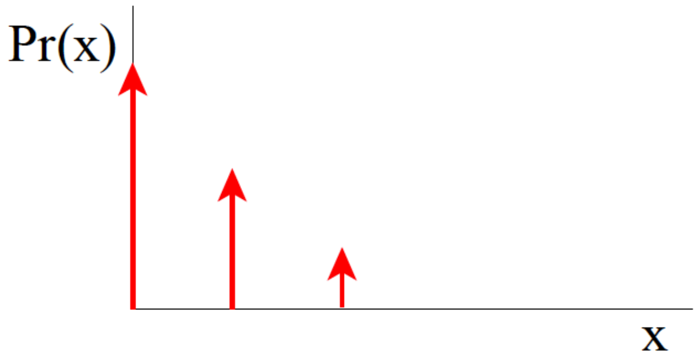
$$\Pr(X) = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

X is the number of defectives

ตัวอย่าง Hypergeometric Distribution

Example: หลอดไฟทั้งหมด 20 หลอด มีหลอดที่เสียอยู่ 2 หลอด ถ้าสุ่มเลือกหลอดไฟมาสองหลอด จงหา probability distribution ของจำนวนหลอดไฟที่เสียที่จะได้

x	Pr(x)
0	$\binom{2}{0}\binom{18}{4}\Big/\binom{20}{4} = 0.632$
1	$\binom{2}{1}\binom{18}{3}\Big/\binom{20}{4} = 0.337$
2	$\binom{2}{2}\binom{18}{2}\Big/\binom{20}{4} = 0.032$



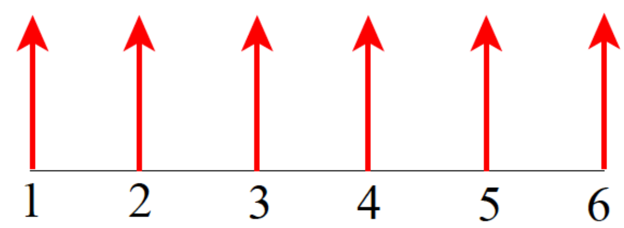
Uniform Distribution

Uniform Distribution : ความน่าจะเป็นที่จะเกิดทุกเหตุการณ์เท่ากันหมด

$$\Pr(X) = \frac{1}{k} \qquad X = x_1, x_2, \ldots$$

Example: การทอยลูกเต๋า

$$\Pr(X) = \frac{1}{6} \qquad S = \{1, 2, \ldots, 6\}$$



Binomial Distribution

Binomial Distribution : ใช้สำหรับ discrete sample space ที่ random variable มีค่าได้ 2 แบบเท่านั้น (binary)

$$\Pr(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} & x = 0, 1, 2, \ldots, n, \quad q = 1 - p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

x คือ จำนวนเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้น

p คือ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์

ตัวอย่าง Binomial Distribution

Example: ถ้าให้ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟยังคงใช้ได้หลังจากใช้งานมา 500 ชั่วโมง คือ p = 0.9 ถ้ามีหลอดไฟทั้งหมด 4 ดวง จงหาความน่าจะเป็นของจำนวนหลอดไฟที่ยังคงใช้ได้

x	Pr(x)
0	$\binom{4}{0}(0.9)^0(0.1)^4 = 0.0001$
1	$\binom{4}{1}(0.9)^1(0.1)^3 = 0.0036$
2	$\binom{4}{2}(0.9)^2(0.1)^2 = 0.0486$
3	$\binom{4}{3}(0.9)^3(0.1)^1 = 0.2916$
4	$\binom{4}{4}(0.9)^4(0.1)^0 = 0.6561$
Total	1.0000

Poisson Distribution

Poisson Distribution : ใช้สำหรับเวลาที่จำนวนการเกิดเหตุการณ์คงที่ตามเวลา หรือโอกาส เช่น จำนวนส่วนประกอบที่จะเสียต่อปี

$$\Pr(x) = \begin{cases} \dfrac{\rho^{x} e^{-\rho}}{\mathrm{x}!} & \rho > 0,\ \mathrm{x} = 0, 1, 2, \ldots \quad \rho = \lambda \mathrm{t},\ \lambda = \text{poisson process intensity} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

x คือ จำนวนเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้น

ρ คือ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์

λ คือ อัตราการเกิดเหตุการณ์

ตัวอย่าง Poisson Distribution

Example: ถ้าอัตราการเสียของชิ้นส่วน คือ 1 ครั้งต่ออาทิตย์ จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีชิ้นส่วนเสียหนึ่งชิ้นใน 4 อาทิตย์

$$\rho = \lambda t = \left(\frac{1}{week}\right)(4\, weeks)$$

$$\Pr(x) = \frac{4^1 e^{-4}}{1!} = 0.0733$$

Continuous Probability Distribution

Continuous Probability Distribution : ใช้สำหรับเวลาโอกาสเหตุการณ์ที่เป็นไปได้เป็นลักษณะต่อเนื่อง (continuous)

ดังนั้น

$$f(x) \geq 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Exponential Distribution

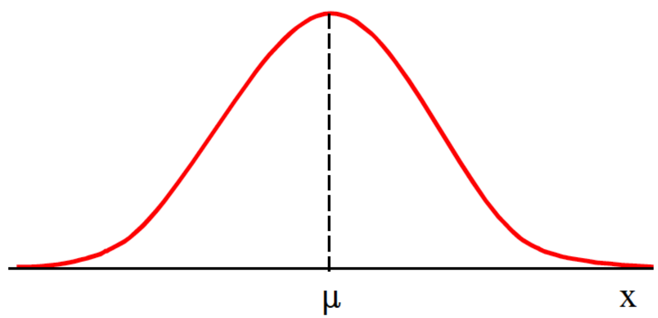
Exponential Distribution : ใช้สำหรับความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ต่อเวลา เช่น โมเดล time-to-failure

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

λ คือ อัตราการเกิดเหตุการณ์

Normal Distribution

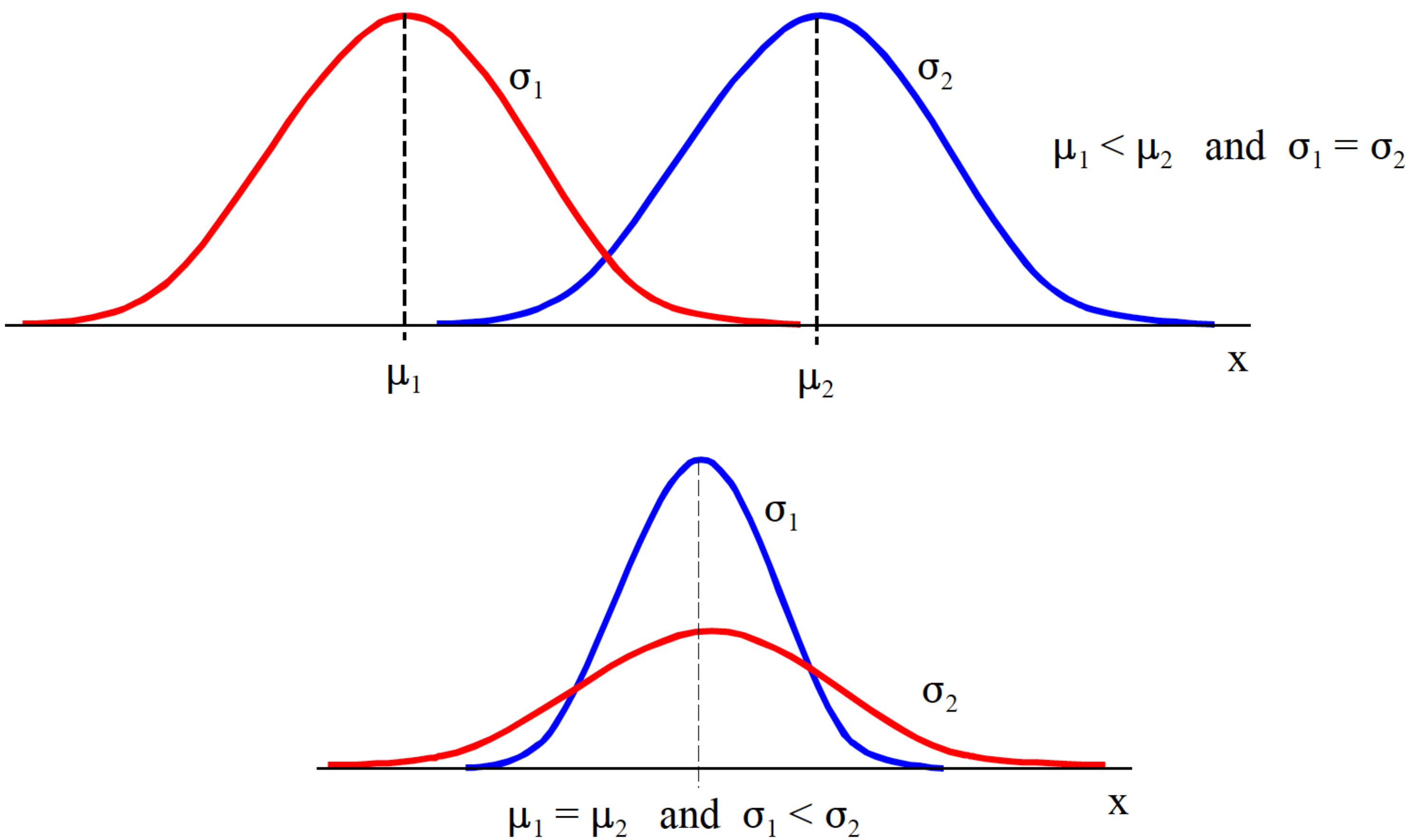
Normal Distribution หรือ Gaussian Distribution : ใช้สำหรับการแจกแจงความน่าจะเป็นของค่าของตัวแปรสุ่มที่เป็นค่าแบบต่อเนื่อง โดยที่ค่าของตัวแปรสุ่มมีแนวโน้มที่จะมีค่าอยู่ใกล้ๆกับค่าๆ หนึ่ง



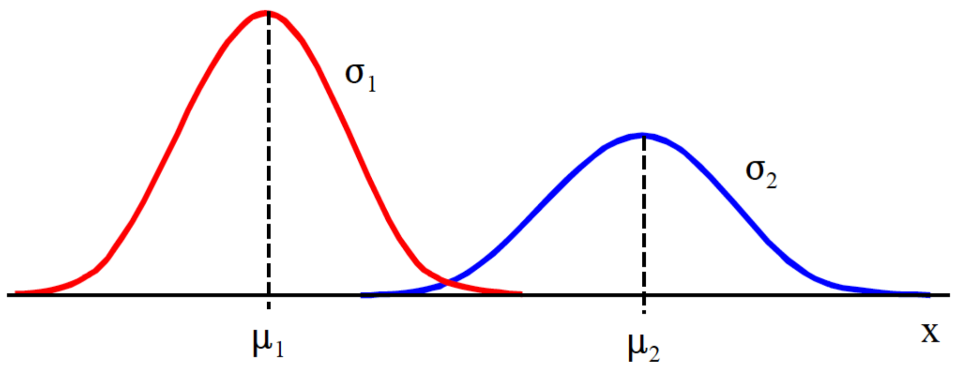
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

where $\pi = 3.14 \cdots$ and $e = 2.718 \cdots$

Normal Distribution



Normal Distribution



$$\Pr(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x_1}^{x_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]dx$$

Transform r.v. X to r.v. Z by using the transformation

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \rightarrow z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\Pr(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz = \int_{z_1}^{z_2} f_{\substack{\mu=0\\ \sigma=1}}(z)dz = \Pr(z_1 < Z < z_2)$$

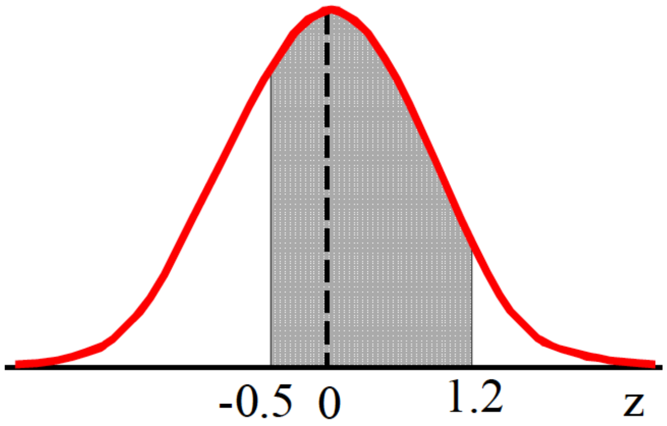
ตัวอย่าง Normal Distribution

Example: ถ้ามี normal distribution ที่ $\mu = 50$ and $\sigma = 10$.

จงหาความน่าจะเป็นที่ X มีค่าระหว่าง 45 กับ 62

$$z_1 = \frac{45-50}{10} = -0.5 \qquad z_2 = \frac{62-50}{10} = 1.2$$

$$\Pr(45 < x < 62) = \Pr(-0.5 < z < 1.2) = 0.5764$$



Cumulative Distribution Function

Cumulative Distribution Function หรือ Cumulative Density Function (cdf) : คือผลรวมความน่าจะเป็นตั้งแต่ x=0

$$F(x)=\begin{cases}\Pr(\mathrm{X}\le \mathrm{x})=\sum_{\mathrm{X}\le \mathrm{x}}\Pr(\mathrm{x}) & \text{for discrete r.v. X}\\ \Pr(\mathrm{X}\le \mathrm{x})=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt & \text{for continuous r.v. X}\end{cases}$$

ตัวอย่าง Cumulative Distribution Function

For **Binomial**

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \sum_{n=0}^{x}\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x} & x=0,1,2,\ldots,n \\ 1 & x\geq n \end{cases}$$

For **Exponential**

$$F(t)=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \int_{0}^{t}\lambda e^{-\lambda t}\,dt=1-e^{-\lambda t} & x>0 \end{cases}$$

Truncated Distributions

Truncated Distribution คือ distribution ที่มีบางส่วนของ range ที่ไม่รู้ค่า ซึ่งจะเป็น conditional distribution ของ domain ที่รู้ค่า

Probability Distribution Function:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{f_0(x)}{F_0(b) - F_0(a)} & for\ x \in (a, b] \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

Cumulative Distribution Function:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & for\ x \leq a \\ \dfrac{\int_a^x f_0(t)\ dt}{F_0(b) - F_0(a)} & for\ x \in (a, b] \\ 1 & for\ x > b \end{cases}$$

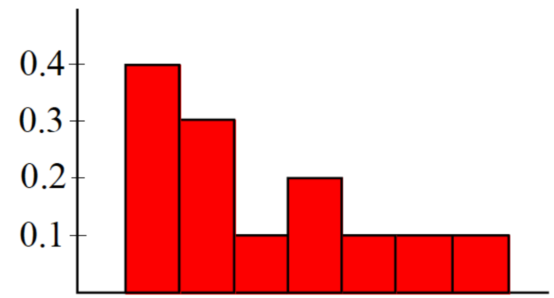
Empirical Distribution

Empirical Distribution ใช้ในกรณีที่ไม่มี distribution ใด ๆ ที่สามารถใช้ได้กับผลของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจริง

Example: หลอดไฟ 50 หลอดมีผล time-to-failure ดังนี้

Sample Space

Class Interval (x 1000 hr)	Probability	Frequency	Class Probability	Expect. Frequency
0 – 1	0.4	20	0.39	19.7
1 – 2	0.3	15	0.24	11.9
2 – 3	0.06	3	0.15	7.2
3 – 4	0.1	5	0.09	4.4
4 – 5	0.06	3	0.05	2.7
5 – 6	0.06	3	0.03	1.6
6 – 7	0	0	0.02	1.0
7 - 8	0.02	1	0.01	0.6
			0.02	0.9
Total	1	50	1.00	50



Joint and Marginal Distribution

ถ้า random variable สามารถมีค่าดังนี้

$$(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \text{ or } (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Joint Distribution คือฟังชั่นที่

$$\text{(i)} \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \qquad -\infty < x_i < \infty \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1, dx_2, \ldots, dx_n = 1$$

Marginal Distribution คือ

$$f_i(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1, dx_2, \ldots, dx_{i-1}, dx_{i+1}, \ldots, dx_n$$

Conditional Distribution

Conditional Distribution ของ X_1 และ X_2 คือ

$$g(x_1 \mid x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)},\ f_2(x_2) \neq 0$$

ถ้า X_1 และ X_2 เป็นอิสระ (independent) จากกัน

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdots f_n(x_n)$$

Bayes' Theorem

ถ้า A_1, A_2,..., A_n เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นต่อเนื่องกัน และ B เป็นเหตุการณ์ที่ $\Pr(B) > 0$

$$\Pr(A_i \mid B) = \frac{\Pr(B \mid A_i)\Pr(A_i)}{\Pr(B)}$$

โดยที่

$$\Pr(B) = \sum_{j=1}^{n} \Pr(B \mid A_j)\Pr(A_j)$$

จะเห็นได้ว่า

$$\Pr(A_i \mid B) = \frac{\Pr(B \cap A_i)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(B \mid A_i)\Pr(A_i)}{\Pr(B)}$$

$\Pr(A_i)$ is called prior (or a priori) probability of events A_i

$\Pr(A_i \mid B)$ is called posterior (or a posteriori) probability of events A_i

Bayes’ Theorem

สำหรับ continuous probability function

$$g(\theta|x)=\frac{\Pr(x|\theta)\Pr(\theta)}{\Pr(x)}=\frac{f(x,\theta)}{f(x)}$$

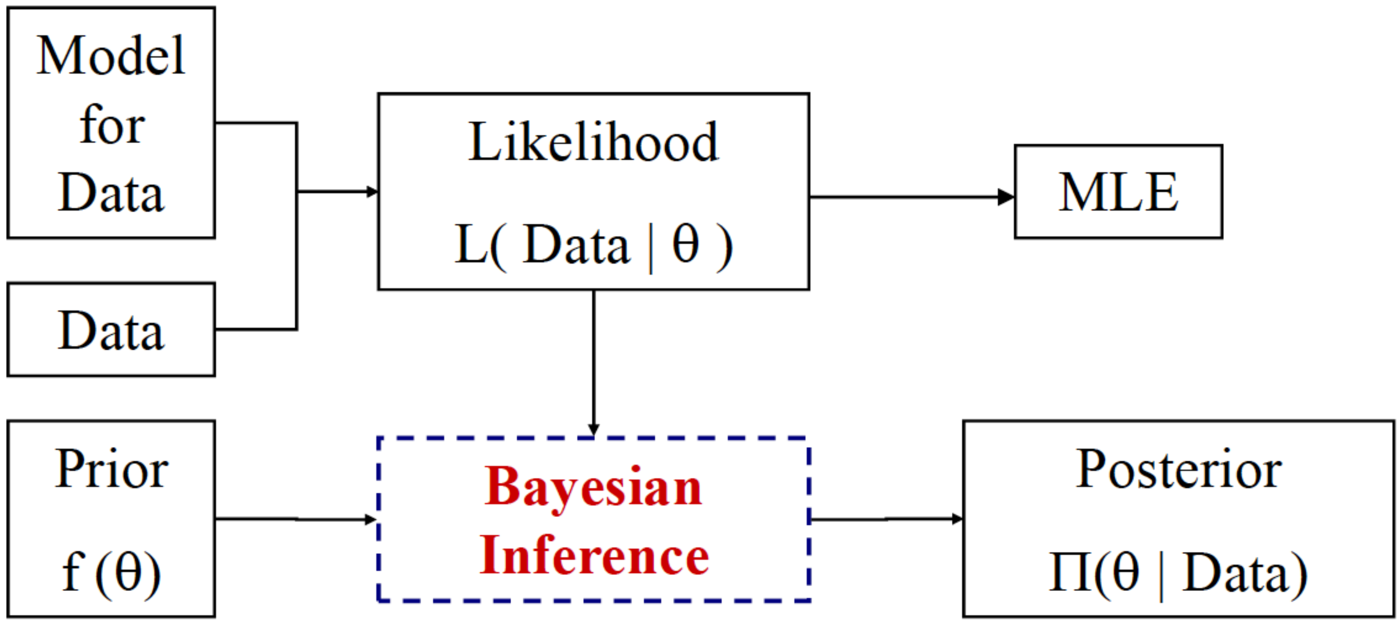
$$f(x)=\int f(x|\theta)g(\theta)d\theta \leftarrow \text{ marginal pdf of x}$$

$$\Pi(\theta|data)=\frac{\Pr(data|\theta)f(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty}\Pr(data|\theta)f(\theta)d\theta}$$

Prior distribution is continuous

likelihood function is discrete

Bayesian Method สำหรับการคาดการณ์



θ = The model parameters vector, $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$

$f(\theta)$ = Joint distribution of parameters

ตัวอย่าง Bayes' Theorem

Example: ถ้ามีระบบผลิต transistor 3 ระบบ S_1, S_2, S_3

S_1 produce 20% of transistors with defective of 0.01
S_2 produce 30% of transistors with defective of 0.02
S_3 produce 50% of transistors with defective of 0.05

$$\Pr(S_1) = 0.2, \quad \Pr(S_2) = 0.3, \quad \Pr(S_3) = 0.5$$
$$\Pr(D \mid S_1) = 0.01, \quad \Pr(D \mid S_2) = 0.02, \quad \Pr(D \mid S_3) = 0.05$$

ถ้าเลือก transistor มาตัวนึงแล้วเสีย จงหาความน่าจะเป็นที่จะมาจาก S_1

$$\Pr(D) = \Pr(D|S_1)\Pr(S_1) + \Pr(D|S_2)\Pr(S_2) + \Pr(D|S_3)\Pr(S_3) = 0.033$$

$$\Pr(S_1|D) = \frac{\Pr(D|S_1)\Pr(S_1)}{\Pr(D)} = \frac{0.01(0.2)}{0.033} = 0.061$$

$$\Pr(S_2|D) = 0.182 \qquad \Pr(S_3|D) = 0.757$$

สถิติความน่าจะเป็น : Expected Value

สำหรับ discrete random variable ค่า expected value ของ g(x) คือ

$$E\left[g(x)\right]=\sum_{i=1}^{k} g(x_i)\Pr(x_i)$$

สำหรับ continuous distribution ค่า expected value ของ f(x) คือ

$$E\left[g(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$$

ตัวอย่างการคำนวณค่า Expected Value

Example: จงหาค่า E[t] และ E[t^2] สำหรับ exponential distribution

$$E[t] = \int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}\,dt \quad = -t\lambda e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt$$

$$= 0 - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\Bigg|_0^\infty \quad = \frac{1}{\lambda}$$

$$E\left[t^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{2}{\lambda^2}$$

Expected Value

Mean:

$$\mu = E[x]$$

Variance:

$$\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 = E\left[(x-\mu)^2\right]$$

$$\sigma^2 = E\left[x^2 - 2\mu x + \mu^2\right]$$

$$= E\left[x^2\right] - E[2\mu x] + E\left[\mu^2\right]$$

$$= E\left[x^2\right] - \mu^2$$

Covariance:

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\}$$

$$= E(X_1, X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

Correlation ระหว่าง X_1 กับ X_2

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)\mathrm{Var}(X_2)}}$$

Expected Value

ในทางสถิติการหา expected value ของค่าที่รวมกันจะได้

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$$

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \,\mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \,\mathrm{Cov}(X_i, X_j), \quad i \neq j$$

และถ้า X_i เป็นอิสระจากกัน (independent)

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \,\mathrm{Var}(X_i)$$

Maximum Likelihood Estimation

Maximum Likelihood Estimation คือการคำนวณความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ E (x_1, x_2 ,..., x_n) ถ้าให้ตัวแปรของ distribution $\boldsymbol{\theta}$

Likelihood function:

$$L(\theta; \mathrm{x}_1,, x_2,, \ldots,, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{f}(\mathrm{x}_i; \theta)$$

Maximum Likelihood (ML) คือ การหาค่า $\boldsymbol{\theta}$ ที่ทำให้มีโอกาสเกิดเหตุการณ์ E มากที่สุด

$$\mathrm{L}(\hat{\theta}; \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n) \geq \mathrm{L}(\theta; \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n).$$

for every value of θ. Statistic $\hat{\theta}$ is a r.v. called the ML estimator of θ.

Solve for θ
$$\left.\frac{\partial L}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = \left.\frac{\partial \ln L}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

References

- IAEA, SAFETY SERIES SSG-3: Development and Application of Level 1 Probabilistic Safety Assessment for Nuclear Power Plants. 2010.
- IAEA, TECDOC-1511: Determining PSA Quality for Applications in NPPs. 2006.
- Modarres, Mohammad, Mark P. Kaminskiy, and Vasiliy Krivtsov. “Reliability engineering and risk analysis: a practical guide”. CRC press, 2016.
- Christian Kirchsteiger, On the use of probabilistic and deterministic methods in risk analysis, Journal of Loss Prevention in the Process Industries 12 (1999) 399–419.
- NRG, Training Course on “Requirements and safety evaluation of NPP PSA”, INSC Project MC3.01/13, Training and Tutoring for experts of the NRAs and their TSOs for developing or strengthening their regulatory and technical capabilities.
- F.C. Brayon, M. Mazlehab, P. Prak Tomb, A.H.S Mohd Sarifc, Z. Ramlia, F. Zakariab, F. Mohamedc, Abid Aslamd, A. Lyubarskiye, I.Kuzminae, P.Hughese , A.Ulsese, Building Competence for Safety Assessment of Nuclear Installations: Applying IAEA's Safety Guide for the Development of a Level 1 Probabilistic Safety Assessment for the TRIGA Research Reactor in Malaysia
- K. Simola, Reliability methods in nuclear power plant ageing management, VTT Publications 379, Technical Research Centre of Finland ESPOO 1999.
- JRC Scientific and Technical Reports, Guidelines for Analysis of Data Related to Ageing of Nuclear Power Plant Components and Systems, EUR 23954 EN - 2009